

# Chapitre 3 – Estimations et tests d'hypothèse (2<sup>e</sup> partie)

STT-1920 Méthodes statistiques

Département de mathématiques et de statistique



UNIVERSITÉ  
LAVAL

# Notion d'intervalle de confiance

# Limite de l'estimation ponctuelle

Dans la première partie (chapitre 3a), nous avons vu que :

- L'estimateur ponctuel  $\bar{X}$  fournit **une seule valeur** pour estimer le paramètre  $\mu$ .
- Parce que  $\bar{X}$  est une variable aléatoire, sa valeur change d'un échantillon à l'autre.
- Pour l'exemple 1 de la pression ( $n = 7$ ), nous avons obtenu  $\bar{x} = 134$  mm Hg.

## Une question fondamentale

Quelle confiance accorder à cette unique valeur 134 ? À quelle distance de la vraie moyenne inconnue  $\mu$  a-t-on des chances de se trouver ?

⇒ On souhaite encadrer  $\mu$  par un intervalle  $[L_1, L_2]$  associé à un **degré de certitude contrôlé**.

# Définition d'un intervalle de confiance

## Intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$

Deux statistiques  $L_1$  et  $L_2$  calculées à partir de l'échantillon telles que

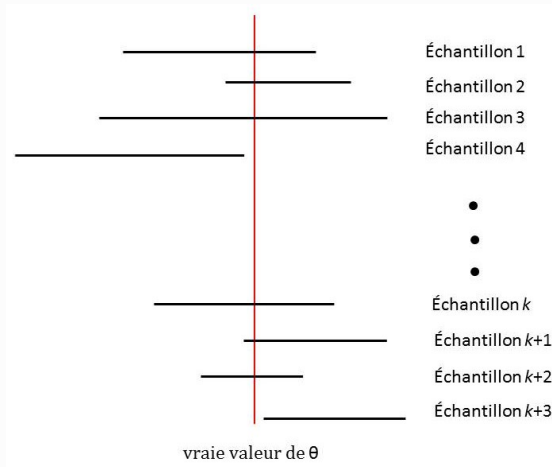
$$P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1 - \alpha.$$

- $\theta$  est le **paramètre inconnu** (valeur fixe de la population).
- $1 - \alpha$  est le **niveau de confiance** (typiquement 90%, 95% ou 99%).
- $\alpha$  est le **seuil de risque** (probabilité que l'intervalle rate la vraie valeur).
- Lorsque l'intervalle est symétrique autour de l'estimation, on écrit

Estimation  $\pm$  Marge d'erreur.

La **marge d'erreur** (ME) est la demi-longueur de l'intervalle.

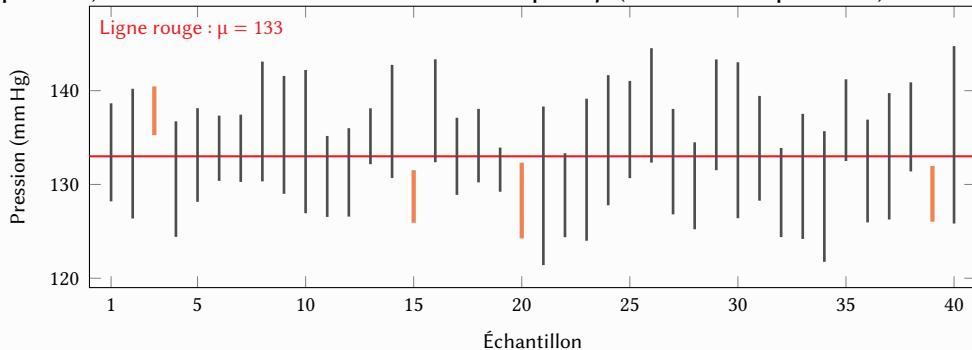
# Que veut dire « confiance à 95% » ?



- Chaque échantillon donne un intervalle **différent** (centre et longueur).
- La vraie valeur  $\theta$  (ligne rouge) est **fixe**.
- Certains intervalles la contiennent, d'autres la ratent (ex. : échantillons 4 et  $k + 3$ ).
- Le niveau de confiance est la proportion des intervalles qui contiennent  $\theta$  **à long terme**.

## Simulation : 40 intervalles de confiance à 90%

40 échantillons de taille  $n = 7$  tirés d'une population  $\mathcal{N}(\mu = 133, \sigma^2 = 62)$  (comme au chapitre 3a). Pour chacun, on calcule l'IC à 90% pour  $\mu$  (formule vue plus loin).



36 intervalles sur 40 (90%) contiennent  $\mu$ ; les 4 intervalles orange la ratent.

# Interprétation rigoureuse

## ✓ Interprétation correcte

Si on prélevait un grand nombre d'échantillons de même taille  $n$  et que pour chacun on construisait l'intervalle à 95%, alors **environ 95% de ces intervalles contiendraient la vraie valeur  $\theta$ .**

## ✗ Attention aux interprétations incorrectes!

- **Faux** : « Il y a 90% de chances que  $\mu$  appartienne à  $[129,39 ; 138,61]$ . »  $\rightarrow \mu$  n'est pas aléatoire : c'est l'intervalle  $[L_1, L_2]$  qui l'est!
- **Faux** : « 90% des individus ont une valeur entre 129,39 et 138,61. »  $\rightarrow$  L'IC vise la *moyenne*  $\mu$ , pas les individus!

# QUIZ!

Dans la simulation précédente (40 intervalles à 90%) :

- Combien d'intervalles s'attendait-on à voir rater  $\mu$  ?
- Si on avait plutôt calculé des IC à 95%, combien en moyenne rateraient  $\mu$  ?  
Les intervalles seraient-ils plus longs ou plus courts ?
- Pourquoi les 40 intervalles n'ont-ils pas tous la même longueur ?

## Construction de l'intervalle pour la moyenne

## Cas théorique : si $\sigma$ était connue

Supposons  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , avec  $\sigma$  connue.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \implies Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Pour un niveau  $1 - \alpha$ , on prend le quantile  $z_{\alpha/2}$  tel que  $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$  :

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

**IC pour  $\mu$  ( $\sigma$  connue) en isolant  $\mu$  au centre**

$$\left[ \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (z_{0,05} = 1,645, z_{0,025} = 1,96, z_{0,005} = 2,576)$$

**Le problème pratique :** en réalité, on ne connaît presque jamais  $\sigma$  !

## Que faire quand $\sigma$ est inconnue ?

Puisque  $\sigma$  est inconnue, l'idée naturelle est de la remplacer par l'écart-type échantillonnal  $S$  :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

- Au dénominateur,  $S$  n'est plus une constante, mais une **variable aléatoire**.
- Cette incertitude supplémentaire rend  $T$  **plus dispersée** que la loi normale centrée réduite  $Z$ .
- $T$  ne suit plus une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  !

### Quelle est la loi exacte de $T$ ?

La réponse a été découverte en 1908 par William Sealy Gosset : la **loi de Student**.

# William Sealy Gosset (1876–1937)

- Chimiste et statisticien en chef à la brasserie **Guinness** à Dublin.
- Travaillait avec de **très petits échantillons** (variétés d'orge, température de brassage, levures).
- Découvre la distribution exacte de  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ .
- Guinness interdisait à ses employés de publier des secrets d'entreprise : il publia en 1908 sous le pseudonyme « **Student** ».



William Sealy Gosset

# La loi de Student $t_k$

## Théorème de Student

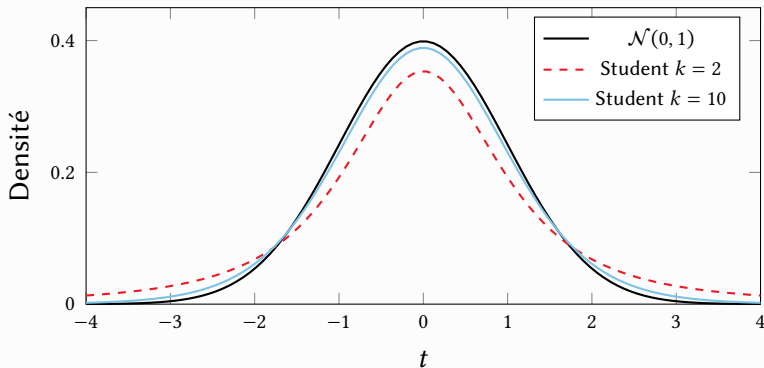
Si  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$

une loi de Student à  $k = n - 1$  degrés de liberté.

- Symétrique en 0, en forme de cloche, tout comme la loi normale.
- Ses queues sont plus lourdes : les valeurs extrêmes sont plus probables en raison de la variabilité de S.
- Quand  $k \rightarrow \infty$ , la loi de Student converge vers la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

# Comparaison de la loi normale et des lois de Student



Pour  $k$  petit, les quantiles sont plus grands que 1,96 pour compenser l'incertitude sur  $\sigma$  (ex. :  $t_{6,0,025} = 2,447$ ;  $t_{29,0,025} = 2,045$ ).

# Formule de l'IC pour $\mu$ ( $\sigma$ inconnue)

## Intervalle de confiance pour la moyenne $\mu$

Soit un échantillon aléatoire d'une population normale :

$$\left[ \bar{X} - t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

- $\bar{X}$  : estimation ponctuelle de la moyenne.
- $\frac{S}{\sqrt{n}}$  : erreur-type estimée (ÉT).
- $t_{n-1, \alpha/2}$  : valeur critique de la table de Student à  $n - 1$  d.l. (dans R : `qt(1-alpha/2, n-1)`).
- $ME = t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$  : la **marge d'erreur**.

## Exemple 1 (suite) : pression artérielle

Mesures ( $n = 7$ ) : 141, 130, 135, 138, 137, 122, 135;  $\bar{x} = 134$  mm Hg,  
 $s = 6,27$  mm Hg.

On cherche un intervalle de confiance à 90%, donc  $\alpha = 0,10$  et  $\alpha/2 = 0,05$ .

1. **Degrés de liberté** :  $k = n - 1 = 7 - 1 = 6$ .
2. **Quantile critique** : dans la table de Student,  $t_{6,0,05} = 1,943$ .
3. **Erreur-type estimée** :  $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{6,27}{\sqrt{7}} = 2,37$ .
4. **Marge d'erreur** :  $ME = 1,943 \times 2,37 = 4,61$  mm Hg.
5. **Intervalle de confiance à 90%** :  
 $[134 - 4,61; 134 + 4,61] = [129,39; 138,61]$  mm Hg

Remarque : on garde toutes les décimales dans les calculs intermédiaires ( $s/\sqrt{n} = 2,3705$ ), puis on arrondit à la fin.

## Avec R

```
> x <- c(141, 130, 135, 138, 137, 122, 135)
> t.test(x, conf.level = 0.90)$conf.int
[1] 129.3938 138.6062
attr(,"conf.level")
[1] 0.9
> t.test(x)$conf.int                # niveau 95 % par défaut
[1] 128.1997 139.8003
```

- La fonction `t.test()` affiche aussi un **test d'hypothèses** ( $t$ ,  $p$ -value) : nous verrons au chapitre 3c comment l'interpréter.
- Quantile à la main : `qt(0.95, df = 6)` donne 1,943.

## Quiz conceptuel : Vrai ou Faux ?

# Question 1

## Énoncé 1

« 90% des gens de cette population ont une pression artérielle comprise entre 129,39 et 138,61 mm Hg. »

**FAUX!**

L'intervalle de confiance est construit pour estimer le paramètre moyen  $\mu$  de la population, et non pas pour contenir 90% des observations individuelles. La variabilité des individus est régie par  $\sigma$  (environ 6,3), alors que l'intervalle est basé sur  $\sigma/\sqrt{n}$  (environ 2,4).

## Question 2

### Énoncé 2

« 90% des gens de cet échantillon ont une pression artérielle comprise entre 129,39 et 138,61 mm Hg. »

**FAUX!**

Pour le vérifier, regardons notre échantillon : {141, 130, 135, 138, 137, 122, 135}.

- 122 et 141 sont à l'extérieur de l'intervalle.
- Seules 5 des 7 valeurs (71,4%) sont à l'intérieur!

L'intervalle ne prétend absolument pas décrire l'échantillon, il vise la **vraie moyenne**  $\mu$ .

## Question 3

### Énoncé 3

« Si on prenait des mesures sur 7 autres individus, il y a 90% de chances que la moyenne  $\bar{x}_{\text{nouveau}}$  de ce nouvel échantillon soit comprise entre 129,39 et 138,61. »

**FAUX!**

Une nouvelle moyenne  $\bar{X}_{\text{nouv}}$  a sa propre variabilité autour de  $\mu$ . L'écart entre deux moyennes indépendantes a pour écart-type  $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , qui est plus grand que  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Pour prédire une nouvelle moyenne ou observation, on utilise un **intervalle de prédiction**.

## Question 4

### Énoncé 4

« Si on tirait 1000 échantillons de taille 7 dans cette population et qu'on calculait pour chacun l'IC à 90%, environ 900 d'entre eux contiendraient la vraie moyenne  $\mu$ . »

**VRAI!**

C'est **exactement** la signification probabiliste du niveau de confiance de 90% (voir la simulation de 40 intervalles)! C'est le mécanisme de construction de l'intervalle qui est fiable à 90%.

## Question 5

### Énoncé 5

« Avec un échantillon de taille  $n \geq 30$ , on peut utiliser les quantiles de la loi normale au lieu de la loi de Student. »

### VRAI (en pratique)!

- Par le théorème limite central (TLC), la loi de  $\bar{X}$  est approximativement normale même si la population ne l'est pas.
- De plus, pour  $n \geq 30$ , la loi de Student est presque identique à la normale :  $t_{29, 0,025} = 2,045 \approx 1,96$ .
- Avec un logiciel comme R, on utilise toutefois toujours la loi de Student.

## Questions 6 et 7

### Énoncé 6

« Avec un échantillon plus grand, on obtiendrait un intervalle de confiance plus long. »

**FAUX** : la longueur vaut  $2 t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$ . Puisque  $\sqrt{n}$  est au dénominateur, **plus  $n$  augmente, plus l'intervalle est étroit.**

### Énoncé 7

« Si la vraie moyenne est de 133, l'estimation obtenue  $\bar{x} = 134$  est biaisée. »

**FAUX** : le biais est une propriété de l'estimateur ( $E[\bar{X}] = \mu$ ). Une réalisation  $\bar{x}$  n'est jamais exactement égale à  $\mu$  en raison de l'aléa, sans que l'estimateur soit biaisé pour autant.

## Cas $n$ grand, marge d'erreur et taille d'échantillon

## Et si la population n'est pas normale ?

Plusieurs variables biologiques sont **asymétriques** (concentrations de contaminants, charges parasitaires...), alors que la formule de Student suppose la normalité.

### IC pour $\mu$ : loi inconnue, $n$ grand (en pratique $n \geq 30$ )

Par le TLC (chapitre 2),  $\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$  et  $S \approx \sigma$ . Un IC de niveau **approximativement**  $1 - \alpha$  est

$$\left[ \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

- Si  $\sigma$  est connue, on l'utilise au lieu de  $S$ . Plus la population est asymétrique, plus  $n$  doit être grand.
- $n$  petit et population très asymétrique : aucune formule fiable !

### Exemple 3 : mercure dans la chair des dorés

On mesure la concentration de mercure ( $\mu\text{g/g}$ ) dans la chair de  $n = 50$  dorés jaunes pêchés dans un réservoir. La distribution est asymétrique à droite. On obtient  $\bar{x} = 0,42 \mu\text{g/g}$  et  $s = 0,18 \mu\text{g/g}$ .

**Question** : donnez un IC à 95% pour la concentration moyenne  $\mu$ .

1.  $n = 50$  est grand : on utilise le TLC et  $z_{0,025} = 1,96$ .
2. Erreur-type estimée :  $s / \sqrt{n} = 0,18 / \sqrt{50} = 0,0255$ .
3. Marge d'erreur :  $ME = 1,96 \times 0,0255 = 0,050 \mu\text{g/g}$ .
4. IC à 95% :  $0,42 \pm 0,050 = [0,370 ; 0,470] \mu\text{g/g}$ .

La ligne directrice de Santé Canada pour le poisson est de  $0,5 \mu\text{g/g}$  : l'intervalle entier est sous cette valeur. Nous verrons au chapitre 3c comment formaliser cette conclusion par un **test**.

# Marge d'erreur et erreur-type : une structure commune

Les trois intervalles pour  $\mu$  ont la même forme :

## Forme générale

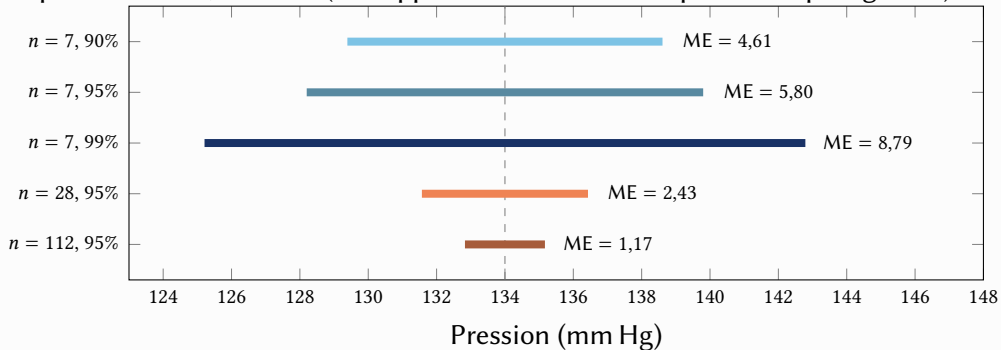
$$\text{Estimation} \pm \underbrace{\text{quantile} \times \text{erreur-type}}_{\text{marge d'erreur}} \quad \text{Longueur} = 2 \times \text{ME}$$

| Situation                  | Estimation | Quantile            | Erreur-type         |
|----------------------------|------------|---------------------|---------------------|
| Normale, $\sigma$ connue   | $\bar{x}$  | $z_{\alpha/2}$      | $\sigma / \sqrt{n}$ |
| Normale, $\sigma$ inconnue | $\bar{x}$  | $t_{n-1, \alpha/2}$ | $s / \sqrt{n}$      |
| Loi inconnue, $n$ grand    | $\bar{x}$  | $z_{\alpha/2}$      | $s / \sqrt{n}$      |

Trois facteurs déterminent la marge d'erreur : la **variabilité** ( $\sigma$ ), la **taille d'échantillon** ( $n$ ) et le **niveau de confiance** (quantile).

# Effet du niveau de confiance et de la taille d'échantillon

Exemple 1 :  $\bar{x} = 134$ ,  $s = 6,27$  (on suppose les mêmes  $\bar{x}$  et  $s$  pour les  $n$  plus grands).



Plus de confiance  $\Rightarrow$  intervalle **plus long**.  $n$  multiplié par 4  $\Rightarrow$  ME environ **divisée par 2**.

# QUIZ!

Vrai ou faux ? La marge d'erreur d'un IC pour  $\mu$  augmente (donc la précision diminue) si :

- la variabilité des mesures augmente;
- la taille d'échantillon augmente;
- le niveau de confiance augmente;
- la population étudiée est plus grande (ex. : tout le Québec plutôt qu'une seule ville).

# Planifier une étude : quelle taille d'échantillon ?

Avant de collecter les données, on veut que la marge d'erreur ne dépasse pas une valeur fixée  $E$  :

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E}$$

**Taille d'échantillon pour estimer  $\mu$  avec une marge d'erreur  $E$**

$$n \geq \left( \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2 \quad (\text{on arrondit toujours vers le haut})$$

- On utilise  $z_{\alpha/2}$  car  $n$  (donc le d.l. de Student) est encore inconnu.
- Il faut une **valeur plausible de  $\sigma$**  : étude pilote, littérature, données antérieures.

## Exemple 1 (suite) : taille d'échantillon

Une étude antérieure indique que l'écart-type de la pression systolique est d'environ  $\sigma = 8$  mm Hg. Combien d'adultes faut-il mesurer pour estimer  $\mu$  avec une marge d'erreur d'au plus **2 mm Hg**, à un niveau de confiance de 95%?

$$n \geq \left( \frac{1,96 \times 8}{2} \right)^2 = 7,84^2 = 61,47 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 62.}$$

**Et pour une marge d'erreur d'au plus 1 mm Hg?**

$$n \geq \left( \frac{1,96 \times 8}{1} \right)^2 = 245,86 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 246.}$$

**⚠** Diviser la marge d'erreur par 2 exige environ **4 fois plus** de sujets : la précision coûte cher!

## Intervalle de confiance pour une proportion

# IC pour une proportion $p$

Rappel (chapitre 3a) :  $\hat{P} = Y/n$  avec  $Y \sim \text{Binomiale}(n, p)$ ,  $E[\hat{P}] = p$  et  $ET(\hat{P}) = \sqrt{p(1-p)/n}$ .

Par le TLC (approximation normale de la binomiale), si  $n$  est grand :  
 $\hat{P} \approx \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ .

## IC de niveau approximatif $1 - \alpha$ pour $p$

$$\left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Conditions d'utilisation :  $n\hat{p} \geq 5$  et  $n(1-\hat{p}) \geq 5$ .

Comme  $p$  est inconnue, on la remplace par  $\hat{p}$  dans l'erreur-type.

## Exemple 2 (suite) : le sondage

Sur  $n = 1028$  Québécois,  $y = 216$  citent l'environnement comme principal enjeu.

1. Estimation :  $\hat{p} = 216/1028 = 0,2101$ . Conditions :  $216 \geq 5$  et  $812 \geq 5$  ✓.
2. Erreur-type :  $\sqrt{0,2101 \times 0,7899/1028} = 0,0127$ .
3. Marge d'erreur à 95% :  $1,96 \times 0,0127 = 0,0249$ .
4. IC à 95% :  $0,2101 \pm 0,0249 = [0,185 ; 0,235]$ , soit de 18,5% à 23,5%.

« **Marge d'erreur de 3,1%, 19 fois sur 20** »

Les sondeurs annoncent la marge d'erreur **maximale**, obtenue avec  $\hat{p} = 0,5$  :  $1,96\sqrt{0,5 \times 0,5/1028} = 0,031$ . « 19 fois sur 20 » signifie un niveau de confiance de 95%.

## Exemple 4 : prévalence d'une infection chez des veaux

Sur 80 veaux examinés dans un troupeau, 12 présentent des symptômes d'infection (chapitre 3a).

1. Estimez la prévalence  $p$  de l'infection dans le troupeau.
2. Les conditions d'utilisation de l'IC approximatif sont-elles respectées ?
3. Construisez un IC à 95% pour  $p$  et interprétez-le.
4. Le vétérinaire affirme que « moins de 5% des veaux sont infectés ». Cette affirmation est-elle plausible ?

(Réponses à la fin du chapitre.)

# Taille d'échantillon pour une proportion

On veut que  $z_{\alpha/2} \sqrt{p(1-p)/n} \leq E$ , d'où

**Taille d'échantillon pour estimer  $p$  avec une marge d'erreur  $E$**

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 p^*(1-p^*)}{E^2}$$

où  $p^*$  est une valeur plausible de  $p$ . **Sans information**, on prend  $p^* = 0,5$  (cas le plus défavorable, car  $p(1-p) \leq 0,25$ ).

**Exemple 5 :** on veut estimer la proportion de tiques porteuses de la bactérie de la maladie de Lyme dans un parc, à  $\pm 5\%$  près (95%).

- Sans information :  $n \geq 1,96^2(0,5)(0,5)/0,05^2 = 384,2 \Rightarrow \mathbf{n = 385}$ .
- Si une étude voisine suggère  $p \approx 0,20$  :  
 $n \geq 1,96^2(0,2)(0,8)/0,05^2 = 245,9 \Rightarrow \mathbf{n = 246}$ .

## Avec R : `prop.test()` et `binom.test()`

```
> prop.test(216, 1028)$conf.int      # Wilson  
[1] 0.1858517 0.2365822  
> binom.test(216, 1028)$conf.int    # exact  
[1] 0.1855853 0.2363200
```

- R n'utilise pas exactement la formule vue en classe, mais des méthodes plus précises lorsque  $n$  est petit ou  $\hat{p}$  proche de 0 ou 1 (Wilson avec correction de continuité; Clopper-Pearson, dit « exact »).
- Avec  $n = 1028$ , les trois méthodes donnent pratiquement le même intervalle :  $[0,185 ; 0,235]$  (formule),  $[0,186 ; 0,237]$  (Wilson),  $[0,186 ; 0,236]$  (exact).
- Pour un petit échantillon, préférer `binom.test()`.

# QUIZ!

Vrai ou faux?

- Un sondage auprès de 1000 Québécois (8,9 millions d'habitants) est beaucoup moins précis qu'un sondage auprès de 1000 Madelinots (12 000 habitants).
- Si un sondage donne  $\hat{p} = 0,10$  avec  $n = 1000$ , la marge d'erreur est plus petite qu'avec  $\hat{p} = 0,50$ .
- Sur 20 souris traitées, 1 développe une tumeur. L'IC à 95% «  $\hat{p} \pm 1,96\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$  » est approprié.

## Intervalle de confiance pour $\sigma^2$ et $\sigma$

# Pourquoi estimer une variance ?

En biologie, la **variabilité** est souvent l'objet d'intérêt :

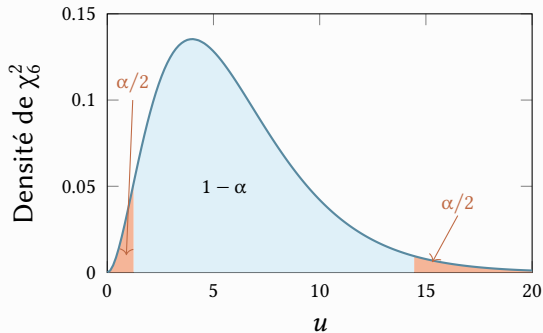
- uniformité de la dose de principe actif dans des comprimés;
- homogénéité d'une lignée de souris de laboratoire;
- stabilité d'un appareil de mesure (précision d'un tensiomètre);
- variabilité du rendement d'un cultivar d'une parcelle à l'autre.

## Rappel : la loi du khi-deux (chapitre 3a)

Si  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

# Quantiles de la loi du khi-deux



- Loi **asymétrique**, à valeurs positives, d'espérance  $n - 1$ .
- On note  $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$  le quantile qui laisse  $\alpha/2$  **à droite**.
- Il faut **deux** quantiles distincts :  $\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$  et  $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$ .
- Ex. ( $n = 7, 95\%$ ) :  $\chi_{6; 0,975}^2 = 1,237$  et  $\chi_{6; 0,025}^2 = 14,449$ .

# Construction de l'IC pour $\sigma^2$

On part de

$$P \left( \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, \alpha/2}^2 \right) = 1 - \alpha$$

et on isole  $\sigma^2$  (attention : inverser une inégalité change son sens!).

**IC de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\sigma^2$  et pour  $\sigma$  (population normale)**

$$\sigma^2 \in \left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} \right] \quad \sigma \in \left[ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}} \right]$$

Le **grand** quantile donne la borne **inférieure**. Pour  $\sigma$ , on prend la racine carrée des bornes.

## Exemple 1 (suite) : variabilité de la pression

$n = 7$ ,  $s^2 = 39,33$ , donc  $(n - 1)s^2 = 236$ . IC à 95% pour  $\sigma^2$  et  $\sigma$ ?

1. Quantiles (6 d.l.) :  $\chi^2_{6;0,025} = 14,449$  et  $\chi^2_{6;0,975} = 1,237$ .

2. IC pour  $\sigma^2$  :  $\left[ \frac{236}{14,449} ; \frac{236}{1,237} \right] = [16,33 ; 190,73] \text{ (mm Hg)}^2$ .

3. IC pour  $\sigma$  :  $\left[ \sqrt{16,33} ; \sqrt{190,73} \right] = [4,04 ; 13,81] \text{ mm Hg}$ .

### Attention!

- L'intervalle **n'est pas symétrique** autour de  $s^2 = 39,33$  (ni de  $s = 6,27$ ).
- Avec  $n = 7$ , il est **très large** : estimer une variance demande beaucoup de données.
- Cette méthode est **sensible à la normalité**, même quand  $n$  est grand (pas de TLC ici).

## Exemple 6 : homogénéité d'une lignée de souris

Une animalerie produit une lignée consanguine de souris, censée être très homogène. On pèse  $n = 20$  souris de 8 semaines et on obtient un écart-type  $s = 1,6$  g. On suppose que les masses suivent une loi normale.

1. Donnez un IC à 95% pour la variance  $\sigma^2$  des masses.
2. Déduisez-en un IC à 95% pour l'écart-type  $\sigma$ .
3. Le fournisseur affirme que  $\sigma = 1$  g. Est-ce plausible ?

Indices :  $\chi^2_{19;0,025} = 32,852$  et  $\chi^2_{19;0,975} = 8,907$ .

Dans R : `qchisq(c(0.975, 0.025), df = 19)`.

# QUIZ!

Vrai ou faux ?

- L'IC pour  $\sigma^2$  est de la forme  $s^2 \pm$  marge d'erreur.
- Si  $[16,33 ; 190,73]$  est un IC à 95% pour  $\sigma^2$ , alors  $[4,04 ; 13,81]$  est un IC à 95% pour  $\sigma$ .
- Avec  $n = 200$  mesures, l'IC pour  $\sigma^2$  basé sur le khi-deux reste valide même si la population est très asymétrique.

# Synthèse

# Tableau récapitulatif des intervalles de confiance

| Paramètre et situation                            | IC de niveau $1 - \alpha$                                                                           | R                                                    |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\mu$ ; normale, $\sigma$ connue                  | $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$                                                        | <code>qnorm()</code>                                 |
| $\mu$ ; normale, $\sigma$ inconnue                | $\bar{x} \pm t_{n-1, \alpha/2} s / \sqrt{n}$                                                        | <code>t.test()</code>                                |
| $\mu$ ; loi inconnue, $n$ grand                   | $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} s / \sqrt{n}$                                                             | <code>t.test()</code>                                |
| $p$ ; $n\hat{p} \geq 5$ , $n(1 - \hat{p}) \geq 5$ | $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$                                            | <code>prop.test()</code> , <code>binom.test()</code> |
| $\sigma^2$ ; normale                              | $\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} \right]$ | <code>qchisq()</code>                                |

**Tailles d'échantillon :**  $n \geq (z_{\alpha/2} \sigma / E)^2$  pour  $\mu$ ;  $n \geq z_{\alpha/2}^2 p^*(1 - p^*)/E^2$  pour  $p$ .

**Prochaine étape (chapitre 3c) :** utiliser ces mêmes lois pour **tester des hypothèses**.

# Réponses aux exemples

- **Quiz (simulation)** : on s'attend à  $40 \times 0,10 = 4$  intervalles qui ratent  $\mu$ ; à 95%, 2 en moyenne, avec des intervalles plus longs; les longueurs varient car  $s$  change d'un échantillon à l'autre.
- **Quiz vrai/faux (énoncés 1 à 7)** : 1 F; 2 F; 3 F; 4 V; 5 V (en pratique); 6 F; 7 F.
- **Exemple 1** : IC à 90% : [129,39; 138,61]; à 95% : [128,20; 139,80]; à 99% : [125,21; 142,79] mm Hg. Taille :  $n = 62$  ( $ME \leq 2$ ) et  $n = 246$  ( $ME \leq 1$ ). IC à 95% pour  $\sigma$  : [4,04; 13,81] mm Hg.
- **Exemple 3 (mercure)** : [0,370; 0,470]  $\mu\text{g/g}$ .
- **Quiz (marge d'erreur)** : V; F; V; F (la taille de la population n'intervient pas, tant qu'elle est grande devant  $n$ ).
- **Exemple 2 (sondage)** : [0,185; 0,235]; marge maximale 3,1%.
- **Exemple 4 (veaux)** :  $\hat{p} = 0,15$ ;  $n\hat{p} = 12$  et  $n(1 - \hat{p}) = 68$  : conditions respectées;  $ET = 0,0399$ ; IC à 95% :  $0,15 \pm 0,078 = [0,072; 0,228]$ . La valeur 5% est sous la borne inférieure : l'affirmation est peu plausible.
- **Exemple 5 (tiques)** :  $n = 385$  sans information;  $n = 246$  si  $p \approx 0,20$ .
- **Quiz (proportions)** : F (la précision dépend de  $n$ , presque pas de la taille de la population); V ( $0,1 \times 0,9 < 0,5 \times 0,5$ ); F ( $n\hat{p} = 1 < 5$  : utiliser `binom.test()`).
- **Exemple 6 (souris)** :  $(n - 1)s^2 = 48,64$ ; IC pour  $\sigma^2$  : [1,48; 5,46]  $\text{g}^2$ ; IC pour  $\sigma$  : [1,22; 2,34] g. La valeur  $\sigma = 1$  g est hors de l'intervalle : peu plausible.
- **Quiz (variance)** : F (intervalle non symétrique); V; F (la méthode exige la normalité).